Experimentaluntersuchungen zur Theorie der Superposition kleiner einfacher Schwingungen.

Inaugural-Dissertation,

die

nebst den beigefügten Thesen

mit Genehmigung der hohen

philosophischen Fakultät der Kgl. Universität zu Breslau

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

am Dienstag, den 1. November 1904, mittags 12 Uhr

in der Aula Leopoldina

öffentlich verteidigen wird

ACAD. LUGD. BIBL.

Milorad M. Popowitsch

aus Schabatz in Serbien.

Opponenten:

Herr stud. phil. **Robert Fliegner.**

Herr stud. phil. **Czeslaus Mizerski.**

Seiner Mutter

und

dem Andenken seines Vaters

in Liebe und Dankbarkeit

gewidmet

vom Verfasser.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543101_0022

I. Einleitung und Versuchsanordnung.

Das Prinzip der Coëxistenz kleiner einfacher Schwingungen in einem zusammengesetzten System, welches gezwungen ist, kleine Oscillationen um seine Ruhelage auszuführen, in welchem viele Probleme der mathematischen Physik ihre Lösung finden, wurde von Daniel Bernoulli[1]) ausgesprochen, auf Grund seiner zahlreichen theoretischen Untersuchungen über die schwingende Bewegung an einem biegsamen Faden aufgehängter Körper, sowie der vertikal aufgehängten Ketten. Dasselbe Problem ist auch von Euler[2]) behandelt worden, welcher auch eine Theorie der Bewegung eines Systems gegeben hat, welches aus mehreren an einem biegsamen Faden in verschiedenen Entfernungen von der Drehungsaxe aufgehängter Kugeln besteht, und gezwungen ist, Oscillationen um seine Ruhelage auszuführen. Von Lagrange[3]) ist eine allgemeine Methode zur Lösung der Probleme der kleinen Schwingungen in beliebigen Systemen gegeben worden. Eine Prüfung der Theorie durch die Versuche, welche, abgesehen von einigen Experimenten Bernoullis, die, erstens, nur angedeutet sind, ohne nähere kontrollierbare Resultate, und zweitens, auf nur einige Beobachtungen beschränkt waren, meines Wissens bis jetzt nicht vorgenommen wurde, ist die Aufgabe dieser

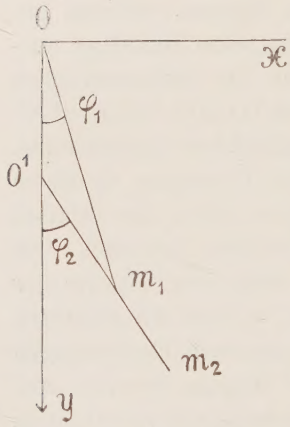
[1]) Comm. Acad. Petrop. t. VI, 1738 et t. VII, 1740,
Novi Comm. Acad. Petrop. t. XIX, 1774,
Mémoires de l'Acad. de Berlin, 1753.

[2]) Comm. Acad. Petrop. t. VII, und Novi Comm. Acad. Petrop. t. XIX.

[3]) Mécanique Analitique, troisième édition, t. 1, p. 320.

Arbeit, zu welcher ich die Anregung meinem hochgeehrten Lehrer Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. O. E. Meyer verdanke.

Wegen der Langsamkeit, mit welcher die Pendelschwingungen vor sich gehen, und weil die Beobachtungen derselben überhaupt einer großen Genauigkeit fähig sind, eignen sie sich zu diesen Versuchen mehr, als alle anderen Erscheinungen, welche ihre Erklärung in dem Gesetz der Coëxistenz kleiner einfacher Oscillationen finden. Die hier zu besprechenden Versuche beziehen sich daher auf ein System, das aus zwei Körpern besteht, welche an einem biegsamen Faden aufgehängt sind. Einem solchen werde ich der Kürze halber den Namen das Doppelpendel geben.



Da ich später, in dem dritten Teil dieser Arbeit, bei der Erklärung der Abweichungen der beobachteten Schwingungszeiten von denjenigen, welche uns die Theorie gibt, öfters auf die Bewegungsgleichungen des Doppelpendels zurückkommen muß, so erachte ich es als notwendig, hier eine kurze Andeutung über den Weg zu geben, auf welchem man zu denselben gelangt.

Man bezeichne, mit φ_1 und φ_2 die Winkel der beiden Faden des mathematischen Doppelpendels mit der vertikale, welche ich für die Y-axe wählen werde, und man setze außerdem

$$m_1 O = l_1, \text{ und } m_1 m_2 = l_2;$$

so kann man die die Koordinaten der Massenpunkte m_1 und m_2 als Funktion der beiden Winkel φ_1 und φ_2 ausdrücken.

Die lebendige Kraft des Systems ist dann:

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2} \cdot l_1^2 \cdot \left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2 + \frac{m_2}{2} \cdot l_2^2 \cdot \left(\frac{d\varphi_2}{dt}\right)^2 + m_2 l_1 l_2 \frac{d\varphi_1}{dt}\frac{d\varphi_2}{dt} \ldots (1)$$

wobei $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ als Faktor des letzten Gliedes gleich 1 gesetzt ist, weil die Winkel als sehr klein angenommen werden.

Das Potential des Systems in einem beliebigen Moment der Bewegung ist:

$$U = (m_1 + m_2) \cdot g\, l_1 (\cos \varphi_1 - 1) + m_2\, g\, l_2 (\cos \varphi_2 - 1). \quad (2)$$

Vermöge der zweiten Form der Lagrange'schen Bewegungsgleichungen und der Ausdrücke (1) und (2), bekommt man sofort als Differentialgleichungen dieser Bewegung folgendes:

$$(m_1 + m_2)\, l_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + m_2\, l_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} + (m_1 + m_2)\, g\, \varphi_1 = 0$$

und

$$l_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + l_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} + g\, \varphi_2 = 0 \quad (3)$$

In diesen Gleichungen sind wieder für die Sinuse der Winkel, diese selbst gesetzt worden.

Setzt man nun in diesen Gleichungen

$$\varphi_2 = \lambda\, \varphi_1$$

und

$$\varphi_1 = \cos \sqrt{k} \cdot t$$

ein, so bekommt man zwei Gleichungen zur Bestimmung von k und λ, welche je zwei verschiedene Werte für k und λ liefern. Die Gleichung für k läßt sich auch so schreiben, daß darin $\frac{g}{k}$ als Unbekannte auftritt d. h. in der Form:

$$\left(\frac{g}{k}\right)^2 - \frac{g}{k}(l_1 + l_2) + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot l_1\, l_2 = 0, \quad (4)$$

und die Gleichung für λ lautet:

$$\lambda^2 - \frac{l_2 - l_1}{l_2} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_2} \cdot \lambda - \frac{m_1 + m_2}{m_2} \cdot \frac{l_1}{l_2} = 0 \quad (5)$$

Die Integrale der Differentialgleichungen (3) sind dann:

$$\varphi_1 = A_1 \cos (t \sqrt{k_1} + a_1) + A_2 \cos (t \sqrt{k_2} + a_2) \quad (6)$$

$$\varphi_2 = \lambda_1 A_1 \cos (t \sqrt{k_1} + a_1) + \lambda_2 A_2 \cos (t \sqrt{k_2} + a_2),$$

wo A_1, A_2, a_1 und a_2 durch Anfangsbedingungen zu bestimmenden Constanten sind und k_1, k_2, λ_1, λ_2 aus den Gleichungen (4) bezw. (5) zu bestimmen sind.

Die Bewegung eines jeden Massenpunktes ist daher die Summe von zwei einfachen Pendelbewegungen, mit den Schwingungsdauern $\frac{\pi}{\sqrt{k_1}}$ und $\frac{\pi}{\sqrt{k_2}}$ und die Längen der ein-

fachen Pendel mit gleichen Schwingungszeiten sind daher $\frac{g}{k_1}$ und $\frac{g}{k_2}$ d. h. nach der Gleichung (4):

$$L_1 = \frac{l_1 + l_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{l_1 - l_2}{2}\right)^2 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} l_1 \cdot l_2}$$

und (7)

$$L_2 = \frac{l_1 + l_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{l_1 - l_2}{2}\right)^2 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot l_1 \cdot l_1}$$

Diese einfachen Schwingungen werde ich kurz als „Elementarschwingungen“ bezeichnen.

Die Bewegung des unteren Massenpunktes unterscheidet sich von derjenigen des oberen nur durch die Amplituden der beiden Elementarschwingungen.

Man kann weiter leicht sehen, daß es theoretisch möglich ist, daß unter gewissen Bedingungen eine der beiden Elementarschwingungen verschwindet, und nur die andere in dem System zurückbleibt; dann sagen wir das Doppelpendel schwinge als (längeres oder kürzeres) Elementarpendel. Bei dieser Schwingungsform findet jederzeit volle Symmetrie in bezug auf die Vertikale statt, nur die Größe der Amplituden ist für beide Massenpunkte verschieden, und zwar muß das Verhältnis der Amplituden beider Massenpunkte einen bestimmten Wert λ_1 bezw. λ_2 haben. Ist dieses Verhältnis positiv, so befinden sich die beiden Massenpunkte bei der Bewegung immer auf derselben Seite der Vertikale, ist es negativ, so befinden sie sich auf den entgegengesetzten Seiten derselben. Im ersten Falle schwingt das Doppelpendel als das „längere“ Elementarpendel, im zweiten als das „kürzere“.

Als das Hauptsächliche zur Prüfung der Theorie erachtete ich die Bestimmung der Schwingungsdauer einzelner Elementarschwingungen, welche in der zusammengesetzten Schwingung des Doppelpendels enthalten sind, sowie, womöglich der Dauer der zusammengesetzten Schwingung selbst. Dieses letztere mußte jedoch nur auf die Fälle beschränkt bleiben, in welchen sich die Dauern der beiden Elementarschwingungen wie zwei ganze Zahlen verhielten, denn nur in solchen Fällen kann überhaupt von einer Schwingungsdauer des zusammengesetzten Pendels, oder

vielmehr von einer Wiederherstellung des Anfangszustandes in demselben die Rede sein. Solche Oscillationen sind, wie man später sehen wird, auf zweierlei Weise hervorzubringen: entweder, man gibt dem Verhältnis beider Massen m_1 und m_2, oder demjenigen beider Fadenlängen l_1 und l_2, einen bestimmten Wert.

Im allgemeinen waren die beiden Elementarschwingungen, aus denen die Bewegung des Doppelpendels resultiert, einzeln hervorgebracht, was, wie schon erwähnt, theoretisch möglich ist.[1]) In der Tat bekam ich die Elementaroscillationen immer von einander getrennt, indem ich einer oder anderer Kugel einen kurzen Stoß mit der Hand oder einem leichten Gegenstande gab, und dann durch eine passende Hemmung einer oder anderer Kugel die Schwingung so regulierte, daß die obere sowie die untere Kugel gleichzeitig ihre Schwingungen vollführten.

Man konnte aber auch in der zusammengesetzten Schwingung die einzelnen Elementarschwingungen leicht unterscheiden, da sich aber in diesem Falle verschiedene störende Einflüsse in anderer Weise betätigen, als es bei den getrennten Elementarschwingungen der Fall ist, so zog ich es vor, dieselben getrennt zu beobachten.

Zur Messung der Schwingungszeit diente eine Normaluhr, welche die Sekunden schlug, und welche durch den elektrischen Strom mit einem Morseapparat verbunden und in einem Zimmer des Erdgeschosses des Physikalischen Instituts der Universität aufgestellt war. Wurde der Strom geschlossen, so registrierte ein Hebel des Apparates auf einem Papierstreifen die Sekunden.

Da die Beobachtungen in einem Zimmer des Kellergeschosses gemacht wurden, wo auch die Aufhängungsvorrichtung für das Pendel war, so wurde ein anderer Stromkreis, durch welchen ein zweiter Hebel des Apparates in Bewegung gesetzt werden konnte, von dem Registrierapparat bis dahin abgeleitet und darin ein Taster eingeschaltet, vermöge dessen die Schwingungen des beobachteten Pendels auf demselben Papierstreifen neben den Sekundenpunkten

---

[1]) D. Bernoulli, Comm. Acad. Petrop. t. VI, p. 108.

notiert wurden. Durch einen dritten Stromkreis war es möglich, den Registrierapparat von dem Experimentierzimmer aus zu arretieren. Vor jeder Beobachtung wurden alle Stromkreise geschlossen, sowie die unmittelbare Arretierung des Morseapparates aufgehoben, wobei es von der Ferne aus arretiert blieb. Nachdem das Pendel in Bewegung gesetzt war, öffnete man diesen dritten Stromkreis, wodurch der Apparat in Bewegung gesetzt wurde, und man notierte vermöge des Tasters die Oscillationen des Pendels, wobei gleichzeitig auch die Sekundenschläge der Uhr auf Papierstreifen automatisch registriert wurden.

Da während der Beobachtungen keine Unregelmäßigkeiten in dem Funktionieren des Apparates bemerkt waren, und da die beobachteten Schwingungszeiten nach mehrfach vorgenommener Prüfung sich als von diesem unabhängig erwiesen hatten, so glaube ich sagen zu dürfen, daß sich diese ganze Vorrichtung als zweckmäßig bewährt hat.

Um aus den gemachten Beobachtungen die Schwingungsdauer zu berechnen, wurden auf dem betreffenden Papierstreifen zwei voneinander entferntere Coincidenzen des beobachteten mit dem Sekundenpendel, zwischen denen etwa 120—250 Schwingungen des Pendels stattgefunden hatten, aufgesucht, und aus dem Verhältnis beider Schwingungszahlen, die Schwingungsdauer des beobachteten Pendels als Mittelwert berechnet.

Die Vorrichtung zum Aufhängen des Pendels bestand aus zwei Messingplatten, welche längs einer Kante an einem Messingstäbchen parallel nebeneinander befestigt waren, und welche in ihrer Mitte eine Durchbohrung hatten. In dieser ging eine Schraube hindurch, mittels welcher man die beiden Platten fest aneinander pressen konnte, und dazwischen auch den Aufhängungsfaden befestigen. Da zu allen Versuchen ein Seidenfaden zum Aufhängen gebraucht wurde, war das Befürchten vor einer Verkürzung der Pendellänge, weil der Faden nicht steif, ausgeschlossen. Das erwähnte Messingstäbchen wurde in einer Durchbohrung eines anderen stärkeren Messingstabes mittels einer Schraube festgeklemmt, und dieser in eine Eichenstange, welche an der Mauer des Zimmers befestigt

war, eingeschraubt. Das Ganze war so fest, daß ein störendes Mitschwingen der Vorrichtung nicht möglich war.

Oberhalb dieser Vorrichtung und an der Holzstange war eine Mikrometerschraube angebracht, an welcher das Ende des zwischen den Messingbacken durchgezogenen Fadens so befestigt wurde, daß durch eine Verschiebung der Schraube eine feinere Verkürzung bezw. Verlängerung des Fadens, je nach dem Bedarf möglich war. Dies war deswegen nötig, weil in allen beobachteten Fällen, dem unteren Faden eine beliebige Länge gegeben wurde und danach bekam, nach den Bedingungen des betreffenden Falles, die Länge des oberen Fadens einen bestimmten Wert.

Die Kugeln, die als Pendelkörper dienten, waren aus Messing oder Stahl gut abgedreht und alle mit zwei diametral gegenüberliegenden Schrauben versehen, deren Köpfe gleichfalls kugelförmig abgedreht waren. Diese hatten in der Mitte eine feine Durchbohrung, durch welche der Aufhängungsfaden ging und vermöge eines Knotens an seinem Ende befestigt.

Wie schon erwähnt, wurde zum Aufhängen des Pendels ein Seidenfaden genommen. Da die ganze Belastung desselben nicht groß war, war wohl auch seine Dehnbarkeit von keinem großen Einfluß auf die beobachtete Schwingungsdauer. Ich glaubte, den Seidenfaden einem Metalldraht vorziehen zu müssen, da mit dem letzteren eine andere Aufhängungsart verbunden ist, welche wieder andere Schwierigkeiten mit sich bringt.

Die Pendellängen sind mit einem Kathetometer gemessen worden.

Außer der Bestimmung der Schwingungsdauer der Elementarpendel, wäre wohl von Interesse, die Oscillationen des Doppelpendels in ihren einzelnen Phasen zu verfolgen; man müsste zu dem Zwecke die Kugeln um eine genau gemessene Länge aus ihrer Ruhelage bringen, dann loslassen und mit einem Fernrohr und einer Scala die Umkehrpunkte beobachten, welche die Kugeln zwischen zwei aufeinanderfolgenden Wiederherstellungen der Anfangslage machen, um diese Beobachtungen dann mit den theoretisch

gegebenen Umkehrpunkten zu vergleichen. Die Amplitude wird jedoch im allgemeinen durch verschiedene störende Einflüsse in kurzer Zeit so verändert, daß ein Vergleichen der Beobachtung mit der Theorie in dieser Beziehung zu keinem befriedigenden Resultate führen würde.

Zur Berechnung der theoretischen Schwingungsdauer war die Kenntnis der Beschleunigung der Schwere, g, nötig. Ich habe dazu den von O. E. Meyer[1]) gefundenen Wert für Breslau:

$$g = 981{,}2$$

gebraucht.

Bei diesen Beobachtungen konnte man die genügende Übereinstimmung der Theorie mit den Versuchen überhaupt nur dann von vornherein erwarten, wenn es möglich wäre, die Versuche unter solchen Bedingungen auszuführen, auf welche die Theorie bezogen ist. Die Theorie des Doppelpendels bezieht sich auf ein mathematisches Pendel, auf den luftleeren Raum und gilt nur für kleine Amplituden. Außerdem setzt sie im ganzen System nur zwei Drehungsaxen voraus: eine unterhalb der Aufhängungsvorrichtung, andere unterhalb der oberen Masse, und sonst ist das System als starr zu betrachten. Die Beobachtungen sind aber auf ein physisches Pendel bezogen, mit nur angenähert kleinen Amplituden und einem mit Luft erfüllten Raum. Außerdem ist das beobachtete System nicht starr, sondern biegsam, und infolgedessen ist die Möglichkeit für noch andere Drehungsaxen vorhanden. Diese sämtlichen Umstände sind, wie ich später zeigen werde, von einem nicht unbedeutenden Einfluß auf die Schwingungsdauer der beiden Elementarpendel. Ich begnüge mich hier damit, diese verschiedenen Einflüsse nur kurz erwähnt zu haben, und werde dann später, nachdem ich die Resultate der Beobachtung mitgeteilt habe, auf ihre nähere Besprechung zurückkommen.

Hier muß ich nur noch erwähnen, daß ich in dem physischen Doppelpendel, d. h. in demjenigen, welches ich beobachtet habe, die Länge l_1 von der oberen Drehungs-

---

[1]) Pogg. Ann. Bd. 142.

axe bis zu dem Schwerpunkt der oberen Kugel gerechnet habe; die Länge l_2 von dem unteren Ende der oberen Kugel bis zu dem Schwerpunkt der unteren Kugel. Diese Annahme ist durch nichts gerechtfertigt, und es wird sich später zeigen, daß sie falsch war. Ich werde dann dementsprechende Korrektionen in dem Resultat anbringen.

II. Beobachtungen.

Die Längen der beiden Elementarpendel und somit auch ihre Schwingungszeiten, welche einem gegebenen Doppelpendel entsprechen, hängen, wie es aus den Gleichungen (7) hervorgeht, einerseits von den beiden Fadenlängen desselben ab, andererseits von den beiden Massen. Diese Gleichungen lassen sich in so einer Form schreiben, daß darin nur die Verhältnisse $\frac{l_1}{l_2}$ und $\frac{m_2}{m r_1}$ vorkommen, und daher sind diese für die Längen der Elementarpendel maßgebend. Statt nun bei den Beobachtungen beliebige Längen und Massen zu nehmen, zog ich es vor, solche Massen und Längenverhältnisse zu wählen, damit die erwähnte Abhängigkeit möglichst klar zu Tage tritt. Es hat dies auch den Vorteil, daß die Berechnung sämtlicher Korrektionen für spezielle Fälle, welche im allgemeinen sehr umständlich ist, in diesen ausgewählten Fällen nicht unwesentliche Vereinfachungen erleidet.

Neben den beobachteten Schwingungszeiten sind immer auch die theoretischen zum Vergleichen angegeben, sowie die theoretischen Längen der beiden „Elementarpendel“. Die Resultate sind teils nach der Reihe der Beobachtung angeführt, teils danach, wie es zur Hervorhebung mancher Tatsachen zweckmäßig erschien. Eine Kontrolle der Resultate ist dadurch ermöglicht, daß in jedem Falle die entsprechenden Bedingungen angegeben sind.

1.

$$l_1 = l_2 = 60{,}24 \text{ cm}$$
$$m_1 = m_2 = 95{,}25 \text{ gr.}$$

Nach den Gleichungen (7) sind dann die Längen beider Elementarpendel

$$L_1 = 102{,}84 \text{ cm},$$
$$L_2 = 17{,}64 \text{ cm},$$

und die entsprechenden Schwingungszeiten, welche ich mit T_1 und T_2 bezeichnen werde:

	T_1	T_2
beobachtet:	1,0240,	0,4251 sec.
berechnet:	1,0171,	0,4212 sec.

Die Abweichung der beobachteten Schwingungszeiten von den berechneten beträgt für das längere Pendel rund 0,7, für das kürzere 1 Prozent. Dieser Unterschied in den relativen Abweichungen bei dem längeren und dem kürzeren Elementarpendel ist bei allen Beobachtungen zu konstatieren, und wird später erklärt werden.

2.

$$l_1 = 2\,l_2 = 120{,}48 \text{ cm},$$
$$m_1 = m_2 = 95{,}25 \text{ gr.}$$

Es ist dann:

$$L_1 = 157{,}70 \text{ cm},$$
$$L_2 = 23{,}01 \text{ cm}.$$

und:

	T_1	T_2
beobachtet:	1,2649,	0,4857
berechnet:	1,2595,	0,4811.

3.

$$l_2 = 2l_1 = 120{,}48 \text{ cm}$$
$$m_1 = m_2 = 95{,}25 \text{ gr.}$$

d. h. es wurden l_1 und l_2 von dem vorigen Fall vertauscht, wobei die Massen gleich blieben. Es ist nach den Gleichungen (7) dann wieder:

$$L_1 = 157{,}70 \text{ cm}$$
$$L_2 = 23{,}01 \text{ cm},$$

und:

	T_1	T_2
beobachtet:	1,2647,	0,4848 sec.
berechnet:	1,2595,	0,4811 sec.

Eine Vergleichung der Resultate aus dem vorigen und diesem Falle zeigt, daß die beiden Pendellängen, sowie die Schwingungszeiten in einem Falle dieselben sind wie in dem anderen, wenigstens gilt das absolut für die theoretischen Werte. Es ist dies die Folge der Symmetrie der Gleichungen (7) in bezug auf l_1 und l_2, d. h. wenn man darin l_1 mit l_2 vertauscht, so bleiben L_1 und L_2 unverändert.

Die relative Abweichung der beobachteten Schwingungszeiten von denen, welche aus der Theorie folgen, ist in beiden Fällen angenähert dieselbe wie in dem ersten Falle.

4.

$$l_1 = 10\, l_2 = 109{,}90 \text{ cm}$$
$$m_1 = m_2 = 95{,}25 \text{ gr.}$$

Daher:

$$L_1 = 115{,}57 \text{ cm}$$
$$L_2 = 5{,}2203 \text{ cm},$$

und:

	T_1	T_2
beobachtet:	1,0862,	0,2314 sec.
berechnet:	1,0786,	0,2291 sec.

Der Unterschied zwischen den Schwingungszeiten der beiden Elementarpendeln wächst also mit dem wachsenden Unterschiede der beiden Fadenlängen.

5.

$$l_1 - l_2 = 61{,}20 \text{ cm},$$
$$m_1 = 75{,}15 \text{ gr}, \quad m_2 = 95{,}25 \text{ gr}.$$

Es ist dann:

$$L_1 = 106{,}96 \text{ cm},$$
$$L_2 = 15{,}44 \text{ cm},$$

und

	T_1	T_2
beobachtet:	1,0445,	0,3976
berechnet:	1,0372,	0,3941.

6. Wenn man nun in dem vorigen Falle die Massen m_1 und m_2 gegenseitig vertauscht, wobei l_1 und l_2 ungefähr dieselben Längen wie vormals haben, d. h.:

$$l_1 = l_2 = 60{,}10 \text{ cm}$$

und

$$m_1 = 95{,}25, \quad m_2 = 75{,}15 \text{ gr.}$$

so bekommt man:

$$L_1 = 100{,}02 \text{ cm},$$
$$L_2 = 20{,}18 \text{ cm}.$$

und:

	T_1	T_2
beobachtet:	1,0099,	0,4546,
berechnet:	1,0030,	0,4505.

Man findet die entsprechenden Werte der Schwingungszeiten in den Fällen 5 und 6 von einander bedeutend verschieden. Es waren zwar auch die Fadenlängen im zweiten Falle etwas kleiner wie diejenigen in dem ersten, weil es mir nicht gelang, dieselben in beiden Fällen gleich zu machen, da die Länge des Fadens zwischen beiden Kugeln (l_3) nur durch das Binden von Knoten zu regulieren war. Es ist jedoch dieser Unterschied so klein, daß er von einem wesentlich kleineren Einfluß ist, als es in der Tat beobachtet war. Die beobachtete Verschiedenheit ist also lediglich die Folge einer veränderten Massenverteilung, was auch mit der Theorie in Übereinstimmung steht.

7.

$$l_1 = 2\,l_2 = 122{,}40 \text{ cm},$$
$$m_1 = 75{,}15, \quad m_2 = 95{,}25 \text{ gr.}$$

und demzufolge:

$$L_1 = 163{,}38,$$
$$L_2 = 20{,}22.$$

	T_1	T_2
beobachtet:	1,2903,	0,4549.
berechnet:	1,2816,	0,4510.

8.

$$l_1 \quad 2\,l_2 = 122{,}14 \text{ cm}$$
$$m_1 = 95{,}25, \quad m_2 = 75{,}15 \text{ gr.}$$

und

$$L_1 = 156{,}59 \text{ cm}$$
$$L_2 = 26{,}63 \text{ cm}$$

	T_1	T_2
beobachtet:	1,2632,	0,5215.
berechnet:	1,2550,	0,5176.

9.

$$l_1 = 10\, l_2 = 114{,}10$$
$$m_1 = 95{,}25 \text{ gr.}, \quad m_2 = 75{,}15 \text{ gr.},$$

und daher:

$$L_1 = 119{,}43 \text{ cm}$$
$$L_2 = 6{,}09 \text{ cm}$$

	T_1	T_2
beobachtet:	1,1034.	0,2499.
berechnet:	1,0961.	0,2475,

10.

$$l_1 = 10\, l_2 = 115{,}40 \text{ cm}.$$
$$m_1 = 75{,}15, \quad m_2 = 95{,}25 \text{ gr.},$$

d. h.

$$L_1 = 122{,}12 \text{ cm}$$
$$L_2 = 4{,}82 \text{ cm}$$

und:

	T_1	T_2
beobachtet:	1,1148.	0,2224.
berechnet:	1,1083.	0,2202.

Es ist hier zu bemerken, daß sich in diesen zwei letzten Fällen der Unterschied der Fadenlängen im zweiten Falle, d. h. bei dem kürzeren Elementarpendel, an den Schwingungszeiten bedeutender bemerkbar macht als in den früheren vier Fällen, weil l_2 an sich sehr klein ist.

Bei der Besprechung der Beobachtungen, welche unter 2 und 3 angegeben sind, ist schon auf die Symmetrie der Gleichungen (7) hingewiesen worden. Man könnte die erwähnte Eigenschaft derselben auch folgendermaßen formulieren:

Gibt man jeder der Massen m_1 und m_2 einen bestimmten Wert, und nimmt man $l_1 + l_2 = \text{const.}$, so sind immer zwei von einander verschiedene Lagen der Masse m_1 möglich, für welche die Schwingungszeiten des längeren sowie des kürzeren Elementarpendels gleich sind, und zwar, wenn eine beliebige Lage der Masse m_1 gegeben ist, so bekommt man die ihr analoge durch gegenseitige Vertauschung von l_1 und l_2. Die Richtigkeit dieser Re-

ziprozität von l_1 und l_2 tun auch die folgenden zwei Beobachtungen dar.

11.

$$l_1 = 2\,l_2 = 111{,}80 \text{ cm.}$$
$$m_1 = 95{,}25, \quad m_2 = 53{,}58 \text{ gr.}$$

d. h.

$$L_1 = 138{,}89 \text{ cm.}$$
$$L_2 = 28{,}81 \text{ cm.},$$

und:

	T_1	T_2
beobachtet:	1,1891.	0,5425.
berechnet:	1,1819.	0,5383.

12.

$$l_2 = 2\,l_1 = 111{,}26 \text{ cm.}$$
$$m_1 = 95{,}25, \quad m_2 = 53{,}58 \text{ gr.},$$

und daher:

$$L_1 = 138{,}22 \text{ cm.}$$
$$L_2 = 28{,}67 \text{ cm.},$$

und:

	T_1	T_2
beobachtet:	1,1867.	0,5415.
berechnet:	1,1791.	0,5370.

Die Unterschiede an den beobachteten Schwingungszeiten in beiden Fällen rühren zum Teil von der Verschiedenheit von l_1 und l_2 her, zum Teil daher, daß die störenden Einflüsse in beiden Fällen von einander verschieden sind. Dieses letztere läßt sich durch später zu entwickelnde Fehlertheorie nachweisen.

13.

$$l_1 = 2\,l_2 = 111{,}68 \text{ cm.}$$
$$m_1 = 53{,}58, \quad m_2 = 95{,}25 \text{ gr.},$$

und:

$$L_1 = 152{,}82 \text{ cm.}$$
$$L_2 = 14{,}70 \text{ cm.},$$

	T_1	T_2
beobachtet:	1,2470.	0,3878.
berechnet:	1,2398.	0,3845.

14.

$$l_2 = 2l_1 = 111{,}76$$
$$m_1 = 53{,}58, \quad m_2 = 95{,}25 \text{ gr.}$$

und daher:

$$L_1 = 152{,}90 \text{ cm}$$
$$L_2 = 14{,}74 \text{ cm},$$

und es wurde beobachtet:

	T_1	T_2
beobachtet:	1,2474.	0,3885.
berechnet:	1,2401.	0,3851.

Das Verhältnis der Schwingungszeiten beider Elementarpendel, welche einem gegebenen Doppelpendel entsprechen, ist im allgemeinen von den Massen und von den Fadenlängen des letzteren abhängig und daher je nach der Wahl derselben verschieden. Im allgemeinen wird sich die Konfiguration, welche das zusammengesetzte Pendel am Anfang hat, nicht mehr wiederherstellen können, da auf eine ganze Anzahl der Schwingungen einer Art nicht immer auch eine ganze anderer Art kommt. Es muß jedoch durch eine passende Wahl von Massen oder von den Fadenlängen oder von beiden zusammen möglich sein, dem Verhältnis der Längen beider Elementarpendel und somit auch demjenigen ihrer Schwingungszeiten einen Wert zu geben, für welchen die Bewegung des Doppelpendels eine regelmäßig periodische sein wird. Dies wird also der Fall sein, wenn sich die Schwingungszeiten der Elementarpendel wie zwei ganze Zahlen, und daher ihre Längen wie die Quadrate dieser Zahlen verhalten.

Dieser Fall ist auch von Bernoulli[1]) behandelt worden, jedoch nur in dem Falle, wodurch eine passende Wahl von Massen der gestellten Bedingung genügt wird. Aber, weder in diesem Falle noch in demjenigen, wo dies durch die Wahl der Längen erreicht wird, hat er allgemeine notwendigen und hinreichenden Bedingungen dazu gegeben.

Dieser Fall ist aber schon deswegen von Interesse, weil man dabei nicht nur einzelne Elementarschwingungen

[1]) Novi Comm. Acad. Petrop. XIX, 1774 p. 260.

getrennt, sondern auch die zusammengesetzte Bewegung selbst in den Bereich der Versuche ziehen und prüfen kann. Im Folgenden werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen zu diesem Fall abgeleitet und durch Versuche geprüft.

Man bezeichne mit q das Quadrat des Verhältnisses zweier ganzen Zahlen, so werden wir die gesuchten Bedingungen finden, indem wir setzen:

$$\frac{l_1+l_2}{2}+\sqrt{\left(\frac{l_1-l_2}{2}\right)^2+\frac{m_2}{m_1+m_2}\,l_1\,l_2}$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} = q. \quad (8)$$
$$\frac{l_1+l_2}{2}-\sqrt{\left(\frac{l_1-l_2}{2}\right)^2+\frac{m_2}{m_1+m_2}\,l_1\,l_2}$$

Man kann diese Gleichung der Hauptsache nach auf zwei Formen bringen, je nachdem man m_1 und m_2 beliebig wählen, und das Verhältnis $\frac{l_1}{l_2}$ so bestimmen will, damit diese Bedingungsgleichung befriedigt wird oder umgekehrt. Die Gleichung (8) kann man daher auf folgende zwei Formen bringen:

$$\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2-\frac{m_1\,(q^2+1)\,-2q\,m_2\,l_1}{q\,(m_1+m_2)}\cdot\frac{l_1}{l_2}+1=0 \quad (9)$$

und

$$\frac{m_2}{m_1}=\frac{(q^2+1)\,l_1 l_2-q\,(l_1^2+l_2^2)}{q\,(l_1+l_2)^2} \quad (10)$$

Die erste Gleichung ist eine quadratische in Bezug auf das Unbekannte $\frac{l_1}{l_2}$, und daher hat sie für dieses zwei Wurzeln, d. h. es gibt im Allgemeinen für dieses Verhältnis zwei Werte, welche den gestellten Bedingungen genügen.

Dies steht in Übereinstimmung mit dem, was wir von der Symmetrie der Gleichungen (7) gesagt haben d. h. dass es unter den gegebenen Bedingungen immer zwei Wertepaare l_1, l_2 gibt, für welche die Schwingungszeiten beider Elementarpendeln dieselben bleiben, und daß man diese Wertepaare (die einen aus den anderen) bekommt, wenn man l_1 und l_2 miteinander vertauscht. Es ist dies ohne weiteres klar, da man die Beziehung (9) aus derjenigen (8) abgeleitet hat, und in dieser letzten bleibt q unverändert,

wenn man l_1 mit l_2 und umgekehrt vertauscht. Das geht im übrigen auch daraus hervor, daß in der Gleichung (9) das letzte, von $\frac{l_1}{l_2}$ unabhängige Glied gleich 1 ist, und daher die beiden Wurzeln derselben reciproke Werte haben müssen. Ich werde aber auch später an einem speziellen Beispiel zeigen, daß die Symmetrie der Gleichungen (7) und die Zweideutigkeit des Verhältnisses $\frac{l_1}{l_2}$ in diesem Falle eine und dieselbe Eigenschaft des Doppelpendels ist.

Da das Prüfen der Bedingung (10) durch die Versuche eine größere Anzahl der Kugeln von verschiedenem Gewicht erfordern würde, so habe ich mich in dieser Beziehung auf die Beobachtung nur zweier charakteristischer Fälle beschränken müssen, welche auch von Bernoulli in der erwähnten Abhandlung angeführt werden.

15. Sei $q = 4$, d. h. die beiden Elementarpendel sollen sich, ihrer Länge nach verhalten wie 4 zu 1, und daher die entsprechenden Schwingungszeiten wie 2 zu 1. Es ist dann, wenn man

$$l_1 = l_2 - 57{,}87 \text{ cm}$$

angenommen, nach der Gleichung (10)

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{9}{16}$$

Die Massen

$$m_1 = 95{,}25 \text{ gr und}$$
$$m_2 = 53{,}58 \text{ gr}$$

verhalten sich mit genügender Annäherung wie 16 zu 9 und genügen der gestellten Bedingung.

Es ist in diesem Falle

$$L_1 = 92{,}59 \text{ cm}$$
$$L_2 = 23{,}15 \text{ cm},$$

und daher:

$$L_1 : L_2 = 4.$$

	T_1	T_2
beobachtet:	0,9717,	0,4871,
berechnet:	0,9650,	0,4825,

oder:

	beobachtet:	berechnet:
$T_1 =$	0,9717,	0,9650
$2\,T_2 =$	0,9742,	0,9650

Bei der Beurteilung der Resultate muß man in Betracht ziehen, daß die störenden Einflüsse bei dem kürzeren Elementarpendel eine größere Abweichung bewirken (vergl. Abschnitt III) und daß diese bei den zu vergleichenden Resultaten verdoppelt ist.

Es wurde dann auch die Beobachtung gemacht, bei welcher die beiden Elementarschwingungen in dem Doppelpendel gleichzeitig vorhanden waren, um die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Herstellungen der Anfangslage zu bestimmen. Nach der Theorie müssen diese in einer Zeit, die gleich $2\,T_1$ ist, eintreten, wovon man sich durch eine einfache Überlegung überzeugen kann. Die Beobachtung ergab für diese Zeit, welche ich mit T bezeichne:

	T
beobachtet:	1,9388,
berechnet ($2\,T_1$):	1,9300.

Diese Beobachtungen mußte ich auf eine kleinere Anzahl von Schwingungen beschränken, da nach einer verhältnismäßig kurzen Zeit, infolge der störenden Einflüsse, die Bewegung nicht mehr periodisch war. Diese Störung trat auch dann nach kurzer Zeit ein, wenn man auf die Messung der Längen der Faden die größte Sorgfalt verwendete, und somit den hier möglichen Fehler nach der Möglichkeit herabminderte. Wir werden später sehen, daß dieses darauf zurückzuführen ist, daß die erwähnten Störungen bei dem kürzeren Elementarpendel immer größer sind, wie bei dem längeren, und daß daher in der zusammengesetzten Bewegung des Doppelpendels die schnellere Elementarschwingung hinter der langsameren relativ zurückbleiben muß.

16. In diesem Falle nahm ich $q = 9$ an, und damit müssen sich die beiden Schwingungszeiten wie 3 zu 1 verhalten. Da weiter

$$l_1 = l_2 = 58{,}24 \text{ cm}$$

genommen wurde, so folgt aus der Gleichung (10):

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{16}{9}$$

Man braucht also nur die beiden Massen von vorhin zu vertauschen, um dieser Bedingung zu genügen. Es ist daher dann:

$$L_1 = 104{,}83 \text{ cm},$$
$$L_2 = 11{,}65 \text{ cm},$$

und

	T_1	T_2
beobachtet:	1,0326,	0,3453
berechnet:	1,0268,	0,3423

und somit:

	beobachtet:	berechnet:
$T_1 =$	1,0326,	1,0268
$3\,T_2 =$	1,0359,	1,0268.

Die Periode der zusammengesetzten Bewegung ist, wie leicht zu sehen ist, auch in diesem Falle $2\,T_1$. In der Tat ergab die Beobachtung des Doppelpendels mit den beiden Elementarschwingungen:

	T
beobachtet:	2,0608
berechnet:	2,0536.

Über die Abweichung der Theorie von der Beobachtung ist in diesem Falle dasselbe zu bemerken, wie im vorigen Falle.

Die Bedingung (9) habe ich in folgenden mehreren Fällen geprüft, und zwar:

17. Wenn $q = 9$ sein soll, und

$$m_1 = m_2 = 95{,}25,$$

so ist nach der Gleichung (9) dieser Bedingung auf zweierlei Weise zu genügen, entweder durch

$$\frac{l_1}{l_2} = 3{,}248,$$

oder durch

$$\frac{l_1}{l_2} = 0{,}308.$$

Weil nun

$$3{,}248 = \frac{1}{0{,}308}$$

ist, so sieht man, daß man die eine Bedingung aus der anderen bekommt, indem man l_1 mit l_2 und umgekehrt vertauscht, was wir schon im allgemeinen erwähnt haben.

In dem ersten Falle, wo das Verhältnis der Fadenlängen gleich 3,248 ist, nahm ich

$$l_1 = 128{,}06 \text{ cm}$$

an, und bestimmte

$$l_2 = \frac{l_1}{3{,}248} = 39{,}46 \text{ cm}$$

Es ist dann:

$$L_1 = 150{,}74 \text{ cm},$$
$$L_2 = 16{,}75 \text{ cm}.$$

und die Beobachtung ergab:

	T_1	T_2
beobachtet:	1,2366,	0,4136
berechnet:	1,2313,	0,4105,

das heißt:

	beobachtet:	berechnet:
$T_1 =$	1,2366,	1,2314
$3\,T_2 =$	1,2408,	1,2314

Die Periode der zusammengesetzten Schwingung ist auch hier $2T_1$.

In dem zweiten Falle, in welchem

$$l_1 = 0{,}308\ l_2$$

sein sollte, nahm ich

$$l_1 = 39{,}22 \text{ cm},$$

und erhielt somit

$$l_2 = 127{,}32 \text{ cm},$$

woraus

$$L_1 = 149{,}89 \text{ cm}$$
$$L_2 = 16{,}65 \text{ cm}$$

folgt. Ich beobachtete dann:

	T_1	T_2
beobachtet:	1,2340,	0,4122
berechnet:	1,2278,	0,4093,

oder,

	beobachtet:	berechnet:
$T_1 =$	1,2340,	1,2279
$3\,T_2 =$	1,2366,	1,2279.

Da die absoluten Werte von l_1 und l_2 in den beiden letzten Fällen etwas von einander verschieden waren, so ist auch ein Unterschied zwischen den absoluten Größen der Schwingungszeiten für die beiden Elementarpendel vorhanden:

Es sei nun hier noch bemerkt, daß für

$$m_1 = m_2,$$

und $q=4$, das Verhältnis $\frac{l_1}{l_2}$ imaginär wird, nach der Gleichung (9), und daher dieser Fall unmöglich ist.

18. Für $q=16$ und $m_1=m_2$ ist entweder

$$\frac{l_1}{l_2} = 6{,}886,$$

oder

$$\frac{l_1}{l_2} = 0{,}145.$$

In dem ersten Fall war

$$l_1 = 135{,}53 \text{ cm}$$

und daher

$$l_2 = 19{,}68 \text{ cm},$$

d. h.

$$L_1 = 146{,}08 \text{ cm}$$
$$L_2 = 9{,}13 \text{ cm}$$

und die Beobachtung ergab:

	T_1	T_2
beobachtet:	1,2189,	0,3054
berechnet:	1,2121,	0,3030.

Daher

	beobachtet:	berechnet:
$T_1 =$	1,2189,	1,2121
$4\,T_2 =$	1,2216,	1,2121.

In dem zweiten Falle, in welchem

$$\frac{l_1}{l_2} = 0{,}145$$

sein sollte, nahm ich

$$l_2 = 135{,}44 \text{ cm}$$

und somit war:

$$l_1 = 19{,}64 \text{ cm}$$

und

$L_1 = 145{,}96$ cm
$L_2 = 9{,}12$ cm

	T_1	T_2
beobachtet:	1,2185,	0,3056
berechnet:	1,2116,	0.3029.

Daraus folgt:

	beobachtet:	berechnet:
$T_1 =$	1,2185,	1,2116
$4\,T_2 =$	1,2224,	1,2116.

Die Schwingungszeiten der zusammengesetzten Pendel mit beiden Oscillationen für diese sämtlichen vier Fälle waren mit derselben Annäherung den berechneten gleich, wie es in den Fällen 15 und 16 beobachtet war. Ich unterlasse es, sie hier, sowie in den folgenden Beobachtungen anzuführen, weil es nur eine Wiederholung der Angaben für die Elementarschwingungen wäre.

19. Soll $q = 25$ sein, und

$$m_1 = m_2,$$

so muß nach der Gleichung (9) entweder

$$l_1 = 11{,}432 \,.\, l_2$$

sein, oder

$$l_1 = 0{,}0875 \,.\, l_2 \,.$$

Nehme ich nun

$$l_2 = 11{,}65 \text{ cm}$$

an, so ist die erste Bedingung durch

$$l_1 = 133{,}66 \text{ cm}$$

befriedigt. Es ist dann

$L_1 = 139{,}76$ cm
$L_2 = 5{,}59$ cm

und

	T_1	T_2
beobachtet:	1,1927.	0,2389.
berechnet:	1,1855.	0,2371.,

das heißt:

	beobachtet:	berechnet:
$T_1 =$	1,1927.	1,1855.
$5\,T_2 =$	1,1945.	1,1855.

Der zweiten Bedingung genügt aber dasselbe Wertepaar wie der ersten, nur in der umgekehrten Reihenfolge.

Ich unterlasse es aber, die Ergebnisse der Beobachtung hier anzugeben, da es an den schon betrachteten Beispielen zur Genüge nachgewiesen ist, daß man die Zweideutigkeit des Verhältnisses $\frac{l_1}{l_2}$ in der Gleichung (9) und die Symmetrie der Gleichungen (7) in Bezug auf l_1 und l_2, als eine und dieselbe Eigenschaft des Doppelpendels zu betrachten hat.

Nimmt man nun $m_1 \gtrless m_2$ und zwar:

$$m_1 = 53{,}58, \quad m_2 = 95{,}25 \text{ gr.},$$

und soll $p = 9$ sein, so kommt man auf den Fall zurück, den wir schon unter 16 beobachtet haben, weil dann, nach der Gleichung (9) $l_1 = l_2$ sein soll.

20. Für $q = 16$, und

$$m_1 = 53{,}58 \text{ gr.},$$
$$m_2 = 95{,}25 \text{ gr.}$$

ist entweder

$$l_1 = 4{,}268\, l_2,$$

oder

$$l_1 = 0{,}235\, l_2.$$

Der ersten Bedingung genügt das Wertepaar:

$$l_1 = 128{,}32 \text{ cm}$$
$$l_2 = 30{,}07 \text{ cm}.$$

Die beiden Elementarpendel haben dann die Längen:

$$L_1 = 149{,}07 \text{ cm}$$

bezw.

$$L_2 = 9{,}32 \text{ cm},$$

und die Beobachtung ergab:

	T_1	T_2
beobachtet:	1,2313.	0,3086.
berechnet:	1,2245.	0,3061,

oder

	beobachtet:	berechnet:
$T_1 =$	1,2323.	1,22445.
$4\,T_2 =$	1,2344.	1,22445.

Für den Fall in welchem

$$l_1 = 0{,}235\, l_2$$

sein soll, nahm ich

$$l_1 = 30{,}25 \text{ cm}$$
$$l_2 = 128{,}69 \text{ cm},$$

und demzufolge war

$$L_1 = 149{,}59 \text{ cm}$$
$$L_2 = 9{,}35 \text{ cm},$$

oder

	T_1	T_2
beobachtet:	1,2336.	0,3089.
berechnet:	1,2266.	0,3066,

oder

	beobachtet:	berechnet:
$T_1 =$	1,2336.	1,2266.
$4\,T_2 =$	1,2356.	1,2266.

21. Der Bedingung

$$q = 16$$

und

$$m_1 = 95{,}25 \text{ gr.}$$
$$m_2 = 53{,}58 \text{ gr.}$$

genügt entweder

$$l_1 = 9{,}479\, l_2$$

oder $l_1 = 0{,}1055\, l_2$

Für den ersten Fall nehme ich

$$l_1 = 133{,}91 \text{ cm}$$
$$l_2 = 14{,}13 \text{ cm}$$

und daher ist

$$L_1 = 139{,}33 \text{ cm}$$
$$L_2 = 8{,}71 \text{ cm},$$

und man beobachtete

	T_1	T_2
beobachtet:	1,1906.	0,2982.
berechnet:	1,1838.	0,2960,

oder

	beobachtet:	berechnet:
$T_1 =$	1,1906.	1,1838.
$4\,T_2 =$	1,1928.	1,1838.

Den zweiten Fall führe ich nicht an.

Somit schließe ich die Reihe der Beobachtungen, und werde im Folgenden versuchen, die beobachteten Abweichungen aus den störenden Einflüssen zu erklären.

III. Versuch einer Erklärung der Fehler.

Die sämtlichen in dieser Untersuchung vorkommenden Messungen sind an sich einer zu großen Genauigkeit fähig, als daß man die Abweichungen der Theorie von den Beobachtungen auf die Beobachtungsfehler zurückführen dürfte. Vielmehr ist von vornherein anzunehmen, daß die verschiedenen in der Theorie nicht berücksichtigten Einflüsse der Hauptsache nach die Ursachen der beobachteten Abweichungen sein müssen.

Um diese theoretisch zu berücksichtigen, würde man im allgemeinen diesen Einflüssen durch das Hinzufügen der entsprechenden Correktionsglieder in den Differentialgleichungen der Bewegung bezw. in den Ausdrücken für die lebendige Kraft und für das Potential, Rechnung zu tragen suchen. Eine gleichzeitige Berücksichtigung sämtlicher Einflüsse hätte den Vorteil, daß sie die wirkliche Bewegung genauer wiedergibt, hat aber den Nachteil, daß sie zu den Differentialgleichungen führt, deren Integration entweder mit großen Schwierigkeiten verbunden, oder sind sie nur unter gewissen nicht immer zutreffenden Voraussetzungen integrierbar. Außerdem läßt sich in solchem Falle nicht immer entscheiden, welche Einflüsse, wenn mehrere vorhanden, am schwerwiegendsten sind. Die Berücksichtigung einzelner Einflüsse für sich, bringt wohl Ungenauigkeiten in die Rechnung, aber die Größenordnung derselben ist wesentlich kleiner, als die gesuchten Fehler selbst. Dieses Verfahren erlaubt jedoch, leicht zu erkennen, ob der betreffende Einfluß von großer Bedeutung ist für die beobachtete Größe.

Bei der Besprechung der hier vorkommenden Abweichungen der Theorie von der Beobachtung, werde ich daher den zweiten Weg wählen, das heißt, die verschiedenen in Betracht kommenden Einflüsse einzeln zu berücksichtigen suchen.

Diese Einflüsse rühren, wie ich schon früher kurz erwähnt hatte, von dem Luftwiderstand, von der Bieg-

samkeit des Fadens, von der Verteilung der Masse auf einen endlichen Raum, d. h. der physischen Natur des Doppelpendels und schließlich von der Amplitude, wenn sie nicht genügend klein ist. Ich werde jetzt alle diese Einflüsse der Reihe nach besprechen, und sie in die Rechnung zu bringen suchen.

A) Vergrößerung der Schwingungszeit eines Doppelpendels durch den Luftwiderstand.

Bessel[1]) hat dem Einfluss der Luft auf die Schwingungsdauer eines einfachen Pendels auf die Weise Rechnung getragen, daß er der lebendigen Kraft eines solchen ein Korrektionsglied hinzufügte, welches dem Quadrat der linearen Geschwindigkeit des Pendelkörpers, sowie der Masse der verdrängten Luft proportional war, d. h. eine Korrektion von der Form

$$k \cdot m^1 \cdot \left(l \frac{d\varphi}{dt}\right)^2,$$

wo er **k** als eine konstante nur von der Gestalt und den Dimensionen des Pendelkörpers abhängige Größe betrachtete. Außerdem setzte er in dem Ausdruck für das Drehungsmoment an Stelle der Masse des Pendelkörpers die Differenz derselben und derjenigen der verdrängten Luft, d. h. $m - m^1$, welche Korrektion wegen dem Auftrieb, den der Körper in der Luft erfährt, hinzukommen muß. Die Konstante **k** hatte er für die von ihm gebrauchten Pendel durch Versuche bestimmt.

Stockes[2]) hat einen theoretischen Wert für k gegeben, welcher sich auf ein Fadenkugelpendel bezieht. Nach ihm ist

$$k = \frac{1}{2} + \frac{9}{4a} \sqrt{\frac{2\eta T}{\pi \varrho}},$$

wo η Reibungskoeficient der Luft, ϱ die Dichtigkeit der-

[1]) Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels (Ostwald's Klassiker No. 7).

[2]) O. E. Meyer, Journal für Mathematik. Bd. 73.

selben, a der Radius der Kugel, und T die Schwingungszeit des Pendels bedeutet. Es ist also **k** nicht konstant, sondern von der Pendellänge abhängig, wenn man es auch in gewissen Grenzen als konstant betrachten darf. Da sich dieser theoretische Wert für k nach den Versuchen von O. E. Meyer[1]) bewährt hat, kann man für ein jedes gegebenes einfaches Pendel die Größe **k** berechnen.

Um den Einfluss der Luft auf die Schwingungszeit eines Doppelpendels zu berechnen, werde ich der lebendigen Kraft desselben diejenige der mitbewegten Luft hinzufügen. Die lineare Geschwindigkeit der oberen Kugel ist

$$l_1 \cdot \frac{d\varphi_1}{dt},$$

diejenige der unteren

$$l_1 \frac{d\varphi_1}{dt} + l_2 \frac{d\varphi_2}{dt},$$

wo l_1 und l_2 dieselbe Bedeutung haben wie früher. Die Korrektionsglieder haben dann die Form:

$$k_1 \cdot m^1_1 \left(l_1 \frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2$$

beziehungsweise

$$k_2 \cdot m^1_2 \left(l_1 \frac{d\varphi_1}{dt} + l_2 \frac{d\varphi_2}{dt} \right)^2,$$

wo $\mathbf{m^1_1}$ und $\mathbf{m^1_2}$ die von den Kugeln verdrängte Luftmasse ist.

Fügt man dem in der Einleitung gegebenen Ausdruck der lebendigen Kraft (Gleichung 1) diese Glieder hinzu, und setzt man in dem Ausdruck für das Potential (Gleichung 2) anstatt m_1 und m_2, $m_1 — m_1{}^1$, beziehungsweise $m_2 — m^1_2$, so bekommt man vermöge der zweiten Form der Lagrangeschen Gleichungen, die neuen Differentialgleichungen der Bewegung eines Doppelpendels in einem widerstehenden Medium.

Es erweist sich nun, daß die so korrigierten Längen der beiden Elementarpendeln, $L_1{}^1$ und L^1_2, die folgenden Werte haben:

---

[1]) Pogg. Ann. Bd. 142.

$$L_1 = \frac{l^1_1 + l^1_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{l^1_2 - l^1_1}{2}\right)^2 + \frac{M_2}{M_1 + M_2} l^1_1 l^1_2},$$

wo der Zeichen + für L^1_1, der Zeichen — für L^1_2 giltig ist, und die darin vorkommenden Größen folgende Werte haben:

$$l^1_1 = \frac{m_1 + m_2 + k_1 m^1_1 + k_2 m^1_2}{m_1 + m_2 - m^1_1 - m^1_2} \cdot l_1,$$

$$l^1_2 = \frac{m_2 + k_2 m^1_2}{m_2 - m^1_2} \cdot l_2.$$

$$M_1 = m_1 + k_1 m^1_1, \text{ und}$$

$$M_2 = m_2 + k_2 m^1_2.$$

Diese Korrektionen, die eine Verallgemeinerung der Besselschen für ein einfaches Pendel sind, welche sie in sich als speziellen Fall enthalten, sind also direkt in die Formel für die Längen der beiden Elementarpendel anzubringen, indem man für l_1, l_2, m_1 und m_2, — l^1_1, l^1_2, M_1 und M_2 setzt.

Bei der Anwendung dieser Formel stößt man auf die Schwierigkeit, wie die Schwingungszeit in dem Ausdruck für **k** in diesem Falle zu rechnen ist. Ich glaube jedoch, die Besprechung dieses schon deswegen unterlassen zu dürfen, weil erstens die Werte für **k** in weiten Grenzen sehr wenig von einander verschieden sind (sie liegen in allen Fällen etwa zwischen 1,0 und 0,8[1]), und weil zweitens, wie ich gleich zeigen werde, der Einfluß der Luft auf die Schwingungszeiten beider Elementarpendel, so klein ist, daß er bei der Erklärung der beobachteten Abweichungen noch kaum in Betracht kommt.

Um nun näherungsweise zu bestimmen, von welcher Größenordnung der Einfluß der Luft auf die Schwingungsdauer ist, setze ich

$$k_1 = k_2,$$

was in der Tat in den beobachteten Fällen in erster Annäherung zutreffen wird. Dann ist

---

[1]) Bessel: Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels.

$$l^1_2 = l_2 \cdot \frac{1 + k\frac{\lambda}{\sigma}}{1 - \frac{\lambda}{\sigma}},$$

wo λ die Dichtigkeit der Luft, σ diejenige des Materials, aus welchem die Pendelkugeln gedreht sind — Stahl oder Messing. Da nun in diesem Falle $\left(\frac{\lambda}{\sigma}\right)^2$ in erster Annäherung gegen 1 zu vernachlässigen ist, so kann ich schreiben:

$$l^1_2 = l_2 \left(1 + k \cdot \frac{\lambda}{\sigma}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{\sigma}\right)$$

oder

$$l^1_2 = l_2 \left[1 + (1 + k)\frac{\lambda}{\sigma}\right]$$

Ich nehme nun rund $k = 1$, (also schon einen eher zu großen Wert), $\lambda = \frac{1}{800}$, und $\lambda = 8$, was alles durchweg in erster Annäherung zutrifft, weil k in den beobachteten Fällen den Wert 0,9 hatte, und die Dichtigkeiten vom Stahl und Messing nicht sehr viel von 8 abweichen. Es ist dann:

$$l_2^1 = l_2 \left(1 + \frac{1}{3200}\right).$$

Man sieht weiter leicht aus den Gleichungen für l^1_1 und l^1_2, daß $l^1_1 - l_1$ dieselbe Größenordnung haben muß wie $l^1_2 - l_2$, wenn die Kugeln aus annähernd gleich dichtem Material, und von nicht sehr verschiedenen Dimensionen sind, was bei diesen Beobachtungen immer erfüllt war.

Da nun in den Ausdrücken für die beiden Elementarpendeln L^1_1 und L^1_2 durch den Lufteinfluß die Größe $1 + \frac{1}{3200}$ als Faktor hinzutritt, so ist offenbar

$$L^1_1 = \left(1 + \frac{1}{3200}\right) L_1$$

und

$$L^1_2 = \left(1 + \frac{1}{3200}\right) L_2,$$

und daraus folgt, daß die Längen der beiden Elementarpendel durch den Lufteinfluß um etwa 0.03 Prozent ver-

größert, was in der Schwingungsdauer zirka 0,015 Prozent beträgt.

Aus dieser Überschlagsrechnung sieht man, daß die beobachtete Abweichung im wesentlichen nicht von dem Lufteinfluß herstammen kann. Ich werde daher, ohne mich bei der genauen Berechnung dieses Einflusses aufzuhalten, zur Besprechung anderer Einflüsse übergehen.

B. Das physische Doppelpendel.

Bei der Ableitung der Differentialgleichungen der Bewegung eines mathematischen Doppelpendels ging man, wie eingangs erwähnt, von der lebendigen Kraft und dem Potential des Systems aus. Ich werde bei der Ableitung derselben für das physische Doppelpendel denselben Weg einschlagen. Ich werde jedoch das physische Doppelpendel nicht im allgemeinsten Falle behandeln, sondern ich nehme den speziellen Fall des Fadenkugelpendels, wobei ich die Faden als starr voraussetzen werde.

Wenn ich mit a_1 und a_2 die Radien der beiden Kugeln bezeichne, und lasse ich den großen l_1 und l_2 dieselbe Bedeutung wie früher, so sind jetzt die Coordinaten der Schwerpunkte der beiden Kugeln

$$x_1 = l_1 \sin \varphi_1$$
$$y_1 = l_1 \cos \varphi_1$$

beziehungsweise

$$x_2 = (l_1 + a_1) \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2$$
$$y_2 = (l_1 + a_1) \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 .$$

Man muß weiter beachten, daß die ganze lebendige Kraft jetzt die Summe der lebendigen Kräfte der Schwerpunktsbewegung und derjenigen der Drehung der jetzt ausgedehnten Kugel um ihren Schwerpunkt. Es wird dann die lebendige Kraft des Systems folgende Form haben:

$$T = \frac{1}{2}\left\{ m_1 l_1^2 \left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2 + m_1 (l_1 + a_1)^2 \left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2 + m_2 l_2^2 \left(\frac{d\varphi_2}{dt}\right)^2 \right.$$
$$+ 2 m_2 (l_1 + a_1) l_2 \frac{d\varphi_1}{dt} \cdot \frac{d\varphi_2}{dt} + \frac{2}{5} m_1 a_1^2 \left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2$$
$$\left. + \frac{2}{5} m_2 a_2^2 \left(\frac{d\varphi_2}{dt}\right)^2 \right\} .$$

oder weiter:

$$2\,T = \left[m_1 l_1^2 + m_2 (l_1 + a_1)^2 + \frac{2}{5} m_1 a_1^2 \right] \left(\frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2 + \left[m_2 l_2^2 + \frac{2}{5} m_2 a_2^2 \right] \left(\frac{d\varphi_2}{dt} \right)^2 + 2\, m_2 (l_1 + a_1) l_2 \frac{d\varphi_1}{dt} \cdot \frac{d\varphi_2}{dt} .$$

Das Potential des Systems hat nun offenbar folgenden Wert:

$$U = \left[m_1 g l_1 + m_2 g (l_1 + a_1) \right] . (\cos \varphi_1 - 1) + m_2 g l_2 (\cos \varphi_1 - 1) .$$

In dem Ausdruck für die lebendige Kraft ist für den $\cos (\varphi_1 - \varphi_2)$, welcher als Faktor des letzten Gliedes in demselben vorkommt, 1 gesetzt worden.

Daraus bekommt man als Differentialgleichungen der Bewegung folgendes:

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt} \left\{ m_1 l_1^2 + m_2 (l_1 + a_1)^2 + \frac{2}{5} m_1 a_1^2 \right\} + m_2 (l_1 + a_1) l_2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left[m_1 l_1 + m_2 (l_1 + a_1) \right] g \varphi_1 = 0$$

$$\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} \left(m_2 l_2^2 + \frac{2}{5} m_2 a_2^2 \right) + m_2 (l_1 + a_1) l_2 \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + m_2 l_2 g \varphi_2 = 0 .$$

Setzt man, wie früher, in diesen beiden Gleichungen

$$\varphi_2 = \lambda . \varphi_1$$

und

$$\varphi_1 = \cos t \sqrt{k},$$

so folgt aus ihnen:

$$k = \frac{m_1 g l_1 + m_2 g (l_1 + a_1)}{m_1 l_1^2 + m_2 (l_1 + a_1)^2 + \frac{2}{5} m_1 a_1^2 + m_2 (l_1 + a_1) l_2 . \lambda}$$

$$= \frac{g l_2 \lambda}{l_2^2 \lambda + \frac{2}{5} a_2^2 \lambda + (l_1 + a_1) l_2}$$

— zwei Gleichungen mit zwei unbekannten k und λ. Durch die Elimination von λ bekommt man eine quadratische Gleichung für k. Sind k_1 und k_2 die beiden

Wurzeln dieser Gleichung, so sind die Längen der beiden Elementarpendel

$$L_1 = \frac{g}{k_1} \text{ und } L_2 = \frac{g}{k_2}$$

Der Ausdruck für dieselben läßt sich dann in der Form schreiben

$$L = \frac{l_1^1 + l_2^1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{l_1^1 - l_2^1}{2}\right)^2 + \frac{M_2}{M_1 + M_2} l_1^1 l_2^1} \quad (11)$$

eine Gleichung, welche derjenigen für das mathematische Doppelpendel vollkommen ähnlich ist, und in welcher l^1_1, l^1_2 und das Verhältnis $\frac{M_2}{M_1 + M_2}$ die folgenden Werte haben:

$$l^1_1 = l_1 + a_1 \frac{\frac{2}{5} m_1 a_1 + m_2 (l_1 + a_1)}{m_1 l_1 + m_2 l_1 + a_1)},$$

$$l^1_2 = l_2 + \frac{2}{5} \cdot \frac{a_2^2}{l_2}, \text{ und} \quad (12)$$

$$\frac{M_2}{M_1 + M_2} = \frac{m_2 (l_1 + a_1)^2}{m_1 (l_1^2 + \frac{2}{5} a_1^2) + m_2 \cdot l_1 + a_1)^2} \cdot \frac{l^2_2}{l_2^2 + \frac{2}{5} a_2^2}$$

Auch in diesem Falle sind also die Korrektionen wegen der physischen Natur des Pendels direkt an den Längen, beziehungsweise an dem Massenverhältnis anzubringen.

Vermöge der Formeln (12) lässt sich daher für ein gegebenes physisches Doppelpendel mit den Bestimmungselementen l_1, l_2, m_1, m_2, a_1 und a_2 immer ein äquivalentes mathematisches Doppelpendel bestimmen; gleichfalls sind uns in der Gleichung (11) die reduzierten Längen der beiden Elementarpendel gegeben.

Um nun zu zeigen, wie groß der Unterschied ist zwischen den Schwingungszeiten eines mathematischen und des hier beobachteten physischen Doppelpendels, werde ich ein spezielles Beispiel nehmen, und zwar nehme ich dasjenige, welches in dem zweiten Teil dieser Arbeit unter 1 beobachtet war.

Wenn ich mit T_0 die Schwingungszeit des Elementarpendels bezeichne, welches einem mathematischen Doppel-

pendel entspricht, und mit T diejenige, welche auf das beobachtete Doppelpendel bezogen ist, so habe ich für diesen speziellen Fall:

für das längere Elementarpendel $T = To\ (1 + 0{,}0056)$,

für das kürzere Elementarpendel $T = To\ (1 - 0{,}0109)$.

Bei dem längeren Elementarpendel beträgt daher die Abweichung 0,56 % und reicht beinahe aus, die ganze beobachtete Abweichung (von durchschnittlich 0,7 %) zu erklären. Es ist dies auch für die sämtlichen anderen Beispiele, welche von mir beobachtet wurden, für das längere Elementarpendel im wesentlichen der Fall. In manchen speziellen Beispielen, in denen das Verhältnis $\frac{a_1}{l_1}$, auf welches hier, wie es aus den Gleichungen (12), wenn man sie in einer passenden Form schreibt, zu sehen ist, hauptsächlich ankommt, kleiner ist, ist auch diese Abweichung kleiner; es ist aber gerade in diesen Beispielen der Einfluß der Amplitude, wie man später sehen kann, um so größer, so daß die beobachteten Abweichungen bei dem längeren Elementarpendel immer befriedigend zu erklären sind.

Man sieht weiter an dem oberen Beispiel, daß das kürzere Elementarpendel durch die physische Natur des Doppelpendels noch stärker beeinflußt wird als das längere. Dieser Einfluß hat aber den entgegengesetzten Sinn, als es in den Beobachtungen der Fall war. Dasselbe trifft ungefähr auch für die anderen speziellen Fälle zu. Die beobachteten Abweichungen bei dem kürzeren Elementarpendel lassen sich also durch diesen Einfluß nicht nur nicht erklären, sondern sie werden durch ihn noch stark vergrößert (von rund 1 Prozent auf ca. 2 Prozent). Es muß daher noch eine störende Wirkung vorhanden sein, durch welche bei dem kürzeren Pendel eine zirka doppelt so große Abweichung bewirkt wird, als man sie beobachtet, und welche denselben Sinn haben muß wie die beobachtete. Diese Wirkung dürfte auf das längere Elementarpendel von wesentlich geringerem Einfluß sein. Ich werde in Folgendem zeigen, daß die Amplituden, welche bei einem einfachen Pendel eine zu vernachlässigende Wirkung auf

die Schwingungszeit desselben haben, bei einem Doppelpendel starke Störungen bewirken, und zwar sind ihre Einflüsse auf die beiden Elementarschwingungen ihrer Größe und ihrem Sinne nach solche, wie es zur vollständigen Erklärung der beobachteten Abweichungen nötig ist.

Bevor ich aber zu der Ableitung der Gleichungen der Bewegung eines mathematischen Doppelpendels bei endlicher Amplitude übergehe, werde ich einen anderen, unter hier gegebenen Bedingungen möglichen störenden Einfluß kurz besprechen.

Weil die Zentrifugalkräfte, welche oberhalb und unterhalb der oberen Kugel auf dieselbe wirken, im allgemeinen nicht dieselbe Richtung haben und ihre Angriffspunkte auch nicht zusammenfallen, so wird daraus ein Kräftepaar resultieren, welches die obere Kugel um eine Axe durch ihren Schwerpunkt zu drehen suchen wird. Da nun der Aufhängungsfaden biegsam und nicht wie vorhin vorausgesetzt war, starr ist, so wirkt dieser drehenden Kraft nichts entgegen und die Bewegung wird zustande kommen. Ich setze außerdem eine ähnliche, drehende Bewegung der unteren Kugel voraus. In diesem Falle läßt sich die lebendige Kraft und das Potential des Systems als Funktion von vier Winkeln φ_1, φ_2, ψ_1 und ψ_2 ausdrücken, wo φ_1 und φ_2 ihre frühere Bedeutung haben und ψ'_1 und ψ'_2 die Winkel sind, um welche sich die Kugel in einer beliebigen Zeit der Vertikale gegenüber gedreht haben. Mit anderen Worten ich betrachte hier ein vierfaches Pendel, dessen zwei Teile ihrer Länge nach klein sind. Ein Verfahren demjenigen für ein Doppelpendel vollkommen gleich, führt die Lösung des Problems auf die Lösung einer Gleichung vierten Grades zurück, anstatt auf eine von nur zweiten Grade, wie diejenige (4).

Da es nun hier hauptsächlich darauf ankommt, diejenigen zwei Wurzeln dieser Gleichung zu finden, welche uns interessieren, und diese sind in erster Annäherung bekannt, (Gleichung 11), so konnte ich zur näherungsweisen Lösung der erwähnten Gleichung vierten Grades das Newton'sche Verfahren anwenden, und die Korrektionen wegen dieser Drehung der Kugeln ermitteln.

Da es sehr platzraubend wäre, die Ableitung der Formeln hier zu geben, begnüge ich mich nur damit, den Weg angegeben zu haben, auf welchem man zu denselben gelangt, und werde nun an einem Beispiel zeigen, wie groß dieser Einfluß ist. Dazu wähle ich wieder den Fall 1.

Wenn ich jetzt mit To die Schwingungszeit des Elementarpendels bezeichne, welche ich nach den Gleichungen (11) und (12) berechnet habe, also die Schwingungszeit eines Pendels, dessen physische Natur bereits berücksichtigt ist, und mit T die jetzt noch weiter mit Rücksicht auf die Eigendrehungen der Kugeln korrigierte Schwingungszeit, so ist in dem erwähnten Beispiel

Schwingungszeit des längeren Elementarpendels:

$$T = T_0\ (1 + 0{,}00029),$$

Schwingungszeit des kürzeren Elementarpendels:

$$T = T_0\ (1 + 0{,}00425).$$

Es ist daher die Korrektion für das längere Elementarpendel klein, für das kürzere zwar wesentlich größer, noch immer aber erheblich klein, um zur Erklärung der beobachteten Abweichung von ca. 2 % bei demselben auszureichen.

C. Einfluss der Amplitude auf die Schwingungsdauer eines mathematischen Doppelpendels.

Das Integral der lebendigen Kraft eines mathematischen Doppelpendels lautet, nachdem man $\varphi_1 = \lambda\varphi_2$ gesetzt hat:

$$\left\{(m_1 + m_2)\,l_1^2 + m_2\,l_2^2\,\lambda^2 + 2\,m_2\,l_1\,l_2\,\lambda\cos(1-\lambda)\,\varphi_1\right\}\left(\frac{d\,\varphi_1}{dt}\right)^2 =$$

$$2\,(m_1 + m_2)\,g\,l_1\,(\cos\varphi_1 - \cos a) + 2\,m_2\,g\,l_2\,(\cos\lambda\,\varphi_1 - \cos\lambda\,a),$$

worin a die Amplitude des oberen Pendelkörpers bedeutet: Ich setze nun der Kürze halber:

$$M = (m_1 + m_2)\,l_1^2 + m_2\,l_2^2\,\lambda^2 + 2\,m_2\,l_1\,l_2\,\lambda;$$

$$P = \frac{4\,m_2\,l_1\,l_2\,\lambda}{M}, \quad p = \frac{1-\lambda}{2}, \quad A = 2\,(m_1 + m_2)\,g\,l_1, \text{ und}$$

$$B = 2\,m_2\,g\,l_2, \tag{13}$$

und man beachte, daß

$$\cos(1-\lambda)\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{1-\lambda}{2}\varphi =$$

$$= 1 - 2\sin^2 \mathrm{p}\varphi$$

ist, so folgt aus der oberen Gleichung, wenn ich für φ_1, φ schreibe

$$\mathrm{M}\left\{1 - \mathrm{P}\sin^2 \mathrm{p}\varphi\right\}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}\right)^2 = \mathrm{A}(\cos\varphi - \cos \mathrm{a}) + \mathrm{B}(\cos\lambda\varphi - \cos\lambda \mathrm{a}),$$

oder, weil in der ersten Annäherung

$$\frac{1}{1 - \mathrm{P}\sin^2 \mathrm{p}\varphi} = 1 + \mathrm{P}\sin^2 \mathrm{p}\varphi$$

gleich ist, so folgt

$$\mathrm{M}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}\right)^2 = \left\{\mathrm{A}(\cos\varphi - \cos \mathrm{a}) + \mathrm{B}(\cos\lambda\varphi - \cos\lambda \mathrm{a})\right\} \cdot (1 + \mathrm{P}\sin^2 \mathrm{p}\varphi).$$

Wenn ich nun die Cosinuse in die Reihen nach den Potenzen von φ beziehungsweise nach a entwickele, und dann, wegen der Kleinheit von a und φ nur die Glieder zweiter Ordnung beibehalte, so käme ich durch Integration zu den von uns bisher stets betrachteten Schwingungsformen und den früheren Werten für die Schwingungszeiten bei strenge genommenen unendlich kleinen Amplitude. Wir wollen jetzt weiter auch noch die nächsthöheren Potenzen bei diesen Entwickelungen beibehalten, also erst die sechsten (gegenüber den zweiten als den niedrigsten), oder, was dasselbe ist, die vierten Potenzen von a und φ gegenüber den von a und φ unabhängigen Größen vernachlässigen, anstatt wie bisher bereits die zweiten. So erhalten wir:

$$\mathrm{M}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}\right)^2 = \left\{(\mathrm{A} + \mathrm{B}\lambda^2)\frac{\mathrm{a}^2}{2!} - (\mathrm{A} + \mathrm{B}\lambda^2)\frac{\varphi^2}{2!} - (\mathrm{A} + \mathrm{B}\lambda^4)\frac{\mathrm{a}^4}{4!} + (\mathrm{A} + \mathrm{B}\lambda^4)\frac{\varphi^4}{4!}\right\} \cdot \left(1 + 2\,\mathrm{P}\,\mathrm{p}^2\frac{\varphi^2}{2!} - 8\,\mathrm{P}\,\mathrm{p}^4\frac{\varphi^2}{4!}\right).$$

Nachdem ich dieses durchmultipliziert, und in dem Resultat nur diejenigen Glieder beibehalten habe, welche in Bezug auf φ beziehungsweise a von höchstens dem vierten Grade sind, so erhalte ich,

$$M\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = (A + B\lambda^2)\frac{a^2}{2!} - (A + B\lambda^4)\frac{a^4}{4!} \qquad (14)$$

$$-(A + B\lambda^2).(1 - P p^2 a^2)\frac{\varphi^2}{2!} + \Big[A + B\lambda^4 - 12 P p^2$$

$$(A + B\lambda^2)\Big]\frac{\varphi^4}{4!}$$

Diesen Ausdruck rechts suche ich nun innerhalb der angegebenen Annäherungsgrenzen durch passende Wahl von zwei Constanten **C** und σ zur Übereinstimmung zu bringen mit dem Ausdruck

$$C(\cos\sigma\varphi - \cos\sigma a),$$

sodaß dann also

$$M\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = C(\cos\sigma\varphi - \cos\sigma a) \qquad (15)$$

wird, womit das Problem auf die Lösung einer aus der Theorie des einfachen Pendels bekannter Differentialgleichung zurückgeführt ist.

Zur Bestimmung der Constanten C und σ ergeben sich durch Gleichsetzung der Coefficienten φ^2 und φ^4 auf der rechten Seite der beiden Gleichungen (14) und (15) die beiden folgenden Gleichungen

$$C\sigma^2 = (A + B\lambda^2))1 - Pp^2 a^2)$$

und

$$C\sigma^4 = A + B\lambda^4 - 12 Pp^2(A + B\lambda^2),$$

oder aber, es folgt

$$\sigma^2 = \frac{A + B\lambda^4 - 12 Pp^2(A + B\lambda^2)}{(A + B\lambda^2)(1 - Pp^2 a^2)}$$

$$C = \frac{(A + B\lambda^2)(1 - Pp^2 a^2)^2}{A + B\lambda^4 - 12 Pp^2(A + B\lambda^2)}.$$

Die Coefficienten von a^2 und a^4 in Gleichungen (14) und (15) stimmen dann naturgemäß mit derselben Annäherung von selber überein.

Durch Multiplikationen mit σ^2, und dadurch, daß wir

$$\sigma\varphi = \Phi$$

und

$$\sigma a = A$$

setzen, können wir die Gleichung (15) auf die Form:

$$M\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 = C\sigma^2(\cos\Phi - \cos A)$$

bringen, und diese unterscheidet sich jetzt von derjenigen für ein einfaches Pendel nur durch den für die Anwendung unwesentlichen Umstand, daß die Constante ($C\sigma^2$) in ihr von der Amplitude a (A) abhängig ist.

Die Integration dieser Gleichung liefert uns in bekannter Weise für die Schwingungsdauer den Wert:

$$T = \pi \sqrt{\frac{2M}{C\sigma^2}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{A}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{A}{2} + \ldots \right\} \quad (16)$$

Doch dürfen wir nach den Vernachlässigungen, die wir bereits früher haben eintreten lassen natürlich in dieser Entwicklung nicht mehr Glieder als das mit $\sin^2 \frac{A}{2} = \sin^2 \frac{\sigma a}{2}$ berücksichtigen, das wir in erster Näherung noch durch $\left(\frac{\sigma a}{2}\right)^2$ ersetzen können.

Für die Quadratwurzel in der Gleichung (16) ergibt sich nun unter Berücksichtigung des Wertes von $C\sigma^2$, und wenn wir sogleich wieder die höheren Potenzen als 2 vernachlässigen:

$$\sqrt{\frac{2M}{C\sigma^2}} = \sqrt{\frac{2M}{A + A\lambda^2}} \cdot \left(1 + \frac{Pp^2 a^2}{2}\right),$$

und so folgt dann:

$$T = \sqrt{\frac{2M}{A + B\lambda^2}} \left(1 + \frac{Pp^2 a^2}{2}\right) \left\{ 1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\sigma a}{2}\right)^2 \right\},$$

wo jetzt die Wurzel rechts nach den Gleichungen (13) von a unabhängig ist. Im Falle a = o müssen wir hier unsere früheren Schwingungszeiten T_0 bei unendlich kleiner Amplitude erhalten, wie sie den Längen (7) der Elementarpendel entsprechen. Eine einfache Rechnung bestätigt das. Führen wir daher diese Schwingungszeiten To ein, so erhalten wir für die mit Rücksicht auf die Amplitude a korrigierte Schwingungszeiten:

$$T = To \left(1 + \frac{8 P p^2 + \sigma^2}{16} a^2\right),$$

oder weil in erster Annäherung

$$8 P p^2 + \sigma^2 = \frac{A + B\lambda^4}{A + B\lambda^2} - 4 P p^2$$

ist, so folgt endgiltig:

$$T = To \left\{ 1 + \frac{A + B\lambda^4 - P(1 - \lambda)^2 (A + B\lambda^2)}{A + B\lambda^2} \cdot \left(\frac{a}{4}\right)^2 \right\}. \quad (17)$$

wo A, B und P die aus (13) ersichtlichen Bedeutungen haben. λ ist die Wurzel der quadratischen Gleichung (5). Je nach dem wir die eine oder die andere Wurzel benutzen, erhalten wir die Korrektion der Schwingungsdauer für das eine oder das andere Elementarpendel, und zwar bekommt man durch die Berechnung des zweiten Gliedes in der Klammer sofort den Fehler pro Einheit der Schwingungsdauer für unendlich kleine Amplitude. Natürlicherweise ist hier die Amplitude nur in erster Annäherung berücksichtigt worden.

Bei der Ableitung der Formel (17) hatten wir stillschweigend noch immer wie früher

$$\varphi_2 = \lambda \varphi_1$$

gesetzt, was allerdings theoretisch nicht mehr zu rechtfertigen ist, weil diese Annahme nur bei den linearen Differentialgleichungen Giltigkeit hat. Dies ist jedoch, nachdem die Amplituden als endlich vorausgesetzt, hier nicht mehr der Fall. Weil es sich aber hier nicht darum handelt, eine streng genaue Theorie des Doppelpendels bei endlicher Amplitude zu geben, sondern nur die angenäherten Korrektionen wegen derselben zu ermitteln, so wird wohl diese Annahme mit einer gewissen, für unseren Zweck genügenden Annäherung zutreffen. Eine weitere Berechtigung zu dieser Voraussetzung finde ich in den Beobachtungen selbst, nämlich in dem Umstande, daß selbst bei Beobachtung mehrerer Hunderte von Schwingungen eine merkliche Störung des periodischen Verlaufs der Elementarschwingungen nicht zu bemerken war. So scheint denn diese Annahme — übrigens die einzige prinzipielle Bedenklichkeit dieses Verfahrens — gerechtfertigt zu sein.

In Bezug auf die Formel (17) ist noch zu bemerken, daß die Korrektion wegen der Amplitude, nur von den Massen- und Längenverhältnissen abhängig ist, nicht aber von ihrer absoluten Größe. Das heißt für die sämtlichen Fälle, in welchen z. B.

$$\frac{l_1}{l_2} = 1 \text{ und } \frac{m_1}{m_2} = 1$$

ist, diese Korrektionen gleich groß sind, gleichgiltig, wie groß sind die absoluten Werte von l_1, l_2, m_1 und m_2.

Es ist weiter zu bemerken, daß, nachdem wir einmal

$$\varphi_2 = \lambda \varphi_1$$

als richtig angenommen haben, nach der Formel (17), die Korrektionen sowie an dem längeren, als auch an dem kürzeren Elementarpendel nur von der Amplitude der oberen Kugel abhängig sind, und es ist daher zu unserem Zweck nur die Kenntnis derselben nötig. Gemessen habe ich sie jedoch nicht, aber im allgemeinen auf ca. 1—6 Grad geschätzt. Davon nehme ich einige Fälle aus, von welchen noch unten die Rede sein wird.

Um die Größe des Einflusses der Amplitude auf die Schwingungsdauer der beiden Elementarpendel in einem speziellen Fall zu berechnen, wähle ich dazu wieder das Beispiel 1. Für dasselbe ist, wenn To und T die unkorrigierte und korrigierte Schwingungsdauer bedeuten, und für die Amplitude von 5°:

für das längere Elementarpendel:

$$T = To\,(1 + 0{,}00065)$$

für das kürzere Elementarpendel:

$$T = To\,(1 + 0{,}01410).$$

Man sieht, daß die Korrektion an dem längeren Elementarpendel von derselben Größenordnung ist wie diejenige für ein einfaches Pendel, denn diese letztere beträgt für 5° ca. 0,00048. Die Korrektion bei dem kürzeren Elementarpendel dagegen ist viel größer (rund 22mal so groß), sodaß die beobachteten Abweichungen vollkommen erklärt werden können, denn es ist für den Fall 1:

a) längeres Elementarpendel:

(Korrektionen in der Schwingungsdauer)

Die Korrektion wegen der Luft:	+ 0,03	Prozent.
„ „ „ „ physischen Natur des Pendels:	+ 0,56	„
„ „ „ der Eigendrehung der Kugeln:	+ 0,03	„
„ „ „ der Amplitude:	0,06	„
Die Gesamtkorrektion:	+ 0,68	Prozent.

Die beobachtete Abweichung beträgt rund 0,7%.

b) kürzeres Elementarpendel

Correction wegen der Luft:	+ 0,030	Prozent.
„ „ „ Drehung der Kugeln:	+ 0,425	„
„ „ „ Amplitude:	+ 1,410	„
	+ 1,864	
Korrektion wegen der Ausdehnung der Massen (phys. Pend.):	— 1,090	
Die Gesammtcorrection:	+ 0,775	Prozent.

Man sieht eine wohl befriedigende Übereinstimmung dieser Resultate mit denjenigen der Beobachtung. Sie ist zwar für das längere Elementarpendel größer als für das kürzere; man muß aber berücksichtigen, daß die beiden Elementarschwingungen voneinander getrennt beobachtet waren und daß daher auch die Amplitude für das kurze Elementarpendel etwas größer sein konnte, als für das längere, und es genügt, daß die Amplitude in dem zweiten Falle um einige Minuten größer wird, damit die Korrektion für das kürzere Pendel mit der Beobachtung in einer vollkommenen Übereinstimmung steht.

Man kann sich nun weiter leicht überzeugen, daß die beobachteten Abweichungen auch in anderen Fällen mit derselben Annäherung erklärt werden können. In denjenigen Beispielen, in welchen l_1 und l_2 von einander sehr verschieden sind, wie z. B. der Fall 4 ist, läßt sich die Abweichung bei dem kürzeren Elementarpendel durch eine wesentlich kleinere Amplitude erklären. Und in der Tat mußte in diesem Falle die Amplitude des oberen Körpers für die zweite Schwingungsart wesentlich kleiner sein, weil sonst die Amplitude der unteren Kugel außerordentlich groß sein würde, da in dem Falle für die zweite Schwingungsart

$$\lambda = -(9 + \sqrt{101})$$

ist, und dann würde infolge der großen lebendigen Kraft der unteren Kugel der untere Faden zerreissen. Dies geschah auch bei den Beobachtungen, in welchen nicht die genügende Vorsicht beobachtet wurde.

Mit Hilfe dieser Bemerkung lassen sich die Abweichungen in sämtlichen Fällen gut erklären.

Fasse ich nun die Resultate, zu denen ich in dieser Arbeit gekommen bin, zusammen, so kann ich sagen:

1. Die Coexistenz der Elementarschwingungen in einem Doppelpendel ist nicht nur eine abstrakte mathematische Konzeption sondern ihr kommt eine objektive physische Existenz zu;

2. Die Theorie der kleinen Schwingungen in einem mathematischen Doppelpendel, welche hier auf ein physisches mit größerer Amplitude erweitert ist, steht in genügender Übereinstimmung mit der Beobachtung.

3. Die Amplituden, welche auf die Schwingungsdauer eines einfachen Pendels von geringem Einfluß sind, haben auf die eine Elementarschwingung eines Doppelpendels ebenfalls einen sehr geringen Einfluß, auf die andere aber einen relativ großen.

4. Der Lufteinfluß hat bei einem Doppelpendel ungefähr dieselbe Größenordnung, wie bei einem einfachen Pendel.

Lebenslauf.

Der Verfasser vorliegender Arbeit Milorad M. Popowitsch, griechisch-orthodoxer Konfession, wurde am 5. Februar (n. S.) 1876 zu Schabatz in Serbien geboren. Er besuchte die Volksschule, sowie das Gymnasium seines Heimatsortes und verließ das letztere im Sommer 1894 mit dem Zeugnis der Reife. Seit der Zeit studierte er, eine einjährige Unterbrechung abgerechnet, Mathematik und Naturwissenschaften zuerst an der Universität zu Belgrad in Serbien, und dann an den Universitäten zu Berlin und zu Breslau.

Während seiner Studienzeit in Berlin und in Breslau besuchte er die Vorlesungen und Übungen folgender Herren Professoren:

Bauschinger, von Bezold, Blasius, van't Hoff, Jahn, Meyer O. E., Paulsen, Planck, Warburg, welchen allen er zu großem Danke verpflichtet ist, namentlich dem Herrn Geh. Reg. Rat Prof. Dr. O. E. Meyer für die Anregung zu der vorliegenden Arbeit, sowie für die freundliche Unterstützung bei derselben.

Thesen.

1. Die Bernoulli-Eulersche Theorie der kleinen Schwingungen in einem Doppelpendel ist als durch die Versuche bestätigt zu betrachten.
2. Die Vertauschbarkeit von Aufhängungspunkt und unterem Massenpunkt bei einem mathematischen Doppelpendel ist ebenso eine allgemeine Eigenschaft wie die eines einfachen Pendels, insofern, als sie für beide Elementarschwingungen gleichzeitig zutrifft.
3. Die rein formalistische Moralphilosophie steht in Widerspruch mit vielen Tatsachen der Wirklichkeit.